ECOLE SPECIALE DES TRAVAUX PUBLICS, DU BATIMENT ET DE L'INDUSTRIE

**CONCOURS COMMUN D'ADMISSION
AUX ECOLES SUPERIEURES
DES TRAVAUX PUBLICS
DU BATIMENT
DE MECANIQUE-ELECTRICITE
DE TOPOGRAPHIE**

SESSION 1991

PREMIERE INTERROGATION DE MATHEMATIQUES

Durée : 3 heures

NOTA : *Les sept sujets sont totalement indépendants et peuvent être traités dans un ordre arbitraire sous réserve d'indiquer très clairement leur numéro.*

Dans cette épreuve comme dans toutes celles qui suivront, il sera tenu compte de la qualité de la présentation, écriture, concision et précision, mise en évidence des résultats.

----------O----------

SUJET N° 1

Soit la matrice $A = \frac{1}{3}\begin{vmatrix} 4 & -1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

Montrer que la matrice A^n tend vers une limite A_o quand $n \longrightarrow \infty$.

Expliciter cette matrice limite A_o .

SUJET N° 2

Soit dans un repère euclidien orthonormé $(O, \vec{i}, \vec{j})$ la courbe Γ d'équation polaire $\rho = \frac{2 \sin \theta}{1 - 2 \cos 2\theta}$

Soit M_o le point de Γ de paramètre θ_o et le repère $(M_o, \vec{i}, \vec{j})$; donc (x, y) , (X, Y) explicitent le même point dans les deux repères d'origines O et M_o .

1) Donner, dans le nouveau repère d'origine M_o :

   a) la tangente à Γ en M_o ,

   b) le cercle osculateur à Γ en M_o .

2) Quelle est la développée de Γ dans le repère initial d'origine O ?

ECOLE SPECIALE des TRAVAUX PUBLICS:

1991 2/2 **Première interrogation**

SUJET N° 3

1) Soit 5 constantes réelles, deux à deux distinctes, x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5 .

Montrer qu'existent 5 autres constantes réelles α_1 , α_2 , α_3 , α_4 et α_5 telles que, pour tout polynôme réel P de degré 4 au plus,

(1) $$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} P(x)\,dx = \sum_{k=1}^{5} \alpha_k P(x_k) .$$

2) Soit $S(x)$ le polynôme réel défini par $S(x) = e^{\frac{x^2}{2}} \left(\frac{d^5}{dx^5} \left(e^{\frac{-x^2}{2}} \right) \right)$

Montrer que pour tout polynôme P réel de degré 4 au plus on a $\int_{-\infty}^{+\infty} e^{\frac{-x^2}{2}} S(x) P(x)\,dx = 0$

Donner les racines de $S(x)$.

3) a) On ne suppose plus les constantes x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5 données.

Montrer qu'existent 10 constantes réelles x_1 , x_2 , x_3 , x_4 , x_5 , α_1 , α_2 , α_3 , α_4 et α_5 telles que la relation (1) demeure vraie pour tout polynôme réel P de degré 9 au plus.

b) Trouver x_1 , x_2 , x_3 , x_4 et x_5.

SUJET N° 4

Déterminer tous les polynômes complexes P tels que $P(X) P''(X) = [P'(X)]^2$

SUJET N° 5

Soit $A \in M_n(\mathbb{C})$ avec $a_{i,i} = \omega^2 + 1$, $a_{i,i+1} = a_{i-1,i} = \omega$ et $a_{i,j} = 0$ sinon. Calculer $\alpha_n = \det A$.

Simplifier l'expression lorsque $\omega^n = 1$, puis pour $|\omega| = 1$.

SUJET N° 6

Soit un cône d'un espace euclidien de dimension 3 obtenu par rotation d'une demi-droite Ot par rapport à une demi-droite fixe $O\omega$ faisant avec elle un angle de mesure constante $\alpha \in]0, \frac{\pi}{2}[$. Calculer le volume de la partie de l'espace délimitée par ce cône et une sphère de rayon R tangente intérieurement au cône le long d'un arc de cercle complet. Que se passe-t-il si $\alpha \longrightarrow \frac{\pi}{2}$?

SUJET N° 7

Soit E un espace euclidien de dimension $n \geqslant 3$, H et K deux hyperplans distincts de E, I leur intersection.

Déterminer l'ensemble des points a de H tels que, si b est la projection orthogonale de a sur K, a et b aient même projection orthogonale sur I .

---------O---------

FIN